

深い学びを具現する数学教育の創造

～数学的に説明することができる生徒の育成を目指して～

岐阜県・郡上市中数研 八幡中学校 下村 滉太

1 主題設定の理由

(1) 数学的に説明することについて

中学校学習指導要領解説数学編(平成29年)には、思考力、判断力、表現力等の目標がある。また、各学年における関数領域の学習の目標としては、以下のことが示されている。

第1学年	比例, 反比例として捉えられる二つの数量について, 表, 式, グラフなどを用いて調べ, それらの変化や対応の特徴を見いだすことができるようにする。また, 比例, 反比例を用いて具体的な事象を捉え考察し表現できるようにする。
第2学年	具体的な事象について調べることを通して, 変化や対応の特徴を見だし, 表, 式, グラフを相互に関連付けて具体的な事象を捉え考察し表現することができるようにする。
第3学年	関数 $y = ax^2$ として捉えられる二つの数量について, 変化や対応の特徴を見だし, 表, 式, グラフを相互に関連付けて考察したり, 関数 $y = ax^2$ を用いて具体的な事象を捉え表現したりできるようにする。

ここには、関数の学習を通して身に付けるべき思考力、判断力、表現力等を、3学年を通して、表、式、グラフを根拠に考察し表現することと示されている。

以上のことから、関数領域において、表、式、グラフを根拠に考察し表現することは、「数学的に説明する力」を養うことだと考えた。

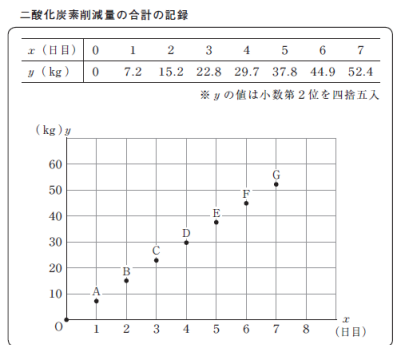
(2) 郡上市の生徒の実態について

出題の趣旨	郡上市	岐阜県
①一次関数の変化の割合の意味を理解している。	33.8%	41.5%
②与えられた表やグラフから、必要な情報を適切に読み取ることができる。	46.7%	57.1%
③事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することができる。	32.8%	40.0%

令和4年度全国学力状況調査の、郡上市と岐阜県の比較である。①(調査問題4)の結果は、岐阜県より低い結果になっており、基本的な関数の知識、技能の

定着に弱さが見られることが分かる。また、②、③(調査問題8)の(1)、(2)の結果では、グラフから必要な情報を読み取ることや、事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することに弱さが見られた。

その要因として、事象から関数関係を見つけ、問題解決に活用していく際に、数学的に説明をする機会が少ないことが考えられた。そこで、「数学的に説明すること」に焦点をあてて実践を進めることにした。



【調査問題8】

2 研究主題と研究仮説

以上のことから、研究主題を設定した。

研究主題

深い学びを具現する数学教育の創造
～数学的に説明することができる生徒の育成を目指して～

また、本研究を実践するにあたり、以下のような研究仮説を設定した。

単元の導入や、単位時間の導入で学習の見通しをもたせることで身に付けるべき力を明らかにし、根拠を明確にして筋道立てて説明することや、多様な考えを比較しながら考える数学的活動を行うことで、数学的に説明できる生徒を育成することができる。

3 研究内容

(1) 数学的な見方・考え方を働かせるための工夫

- ① 深い学びに迫るための、根拠を問う発問や問い返し
- ② 共通点や類似点、相違点に着目し、考察するための手立て

(2) 数学的に説明することができるための工夫

- ① 数学的な表現を用いて、解釈・説明する場の設定
- ② 思考の過程や判断の根拠を的確に表現するための手立て

4 研究実践

(1) 数学的な見方・考え方を働かせるための工夫 研究内容 1-① 深い学びに迫るための、根拠を問う発問や問い返し

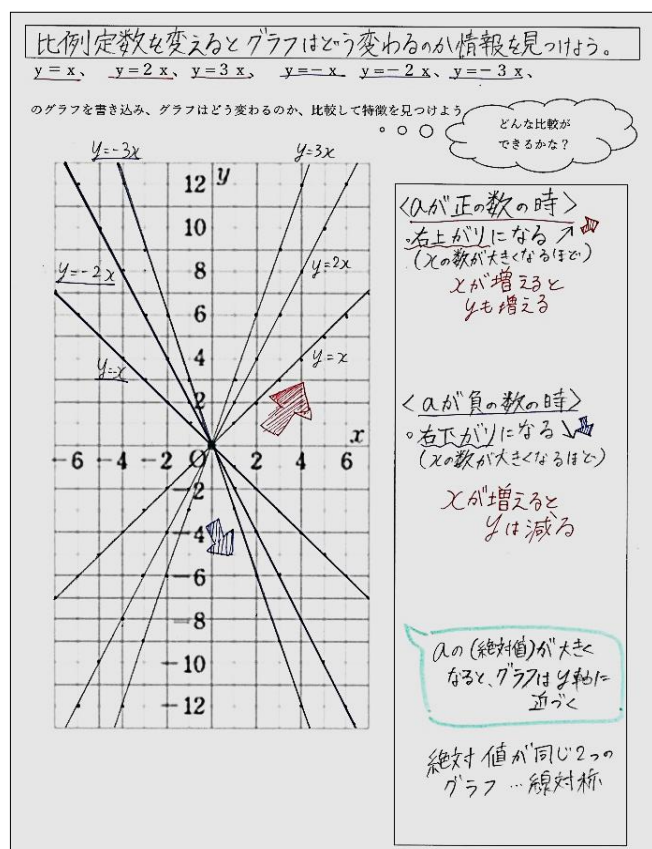
先に述べたように、数学的な活動や探究活動を行う中で生徒が働かせている数学的な見方・考え方の多くは、意識的に働かせているのではなく、無意識的に働いていることが多い。活動する中で、試行錯誤的に進みながら見通しを立てたり思考を進めていく方向性を決めたりするなど、その多くが無意識的に決められていると考える。生徒にとっては無意識的になされているかもしれない活動に、根拠を問う発問や問い返しを行うことで、無意識的に働かせた数学的な見方・考え方を顕在化させることができると考えた。

ア 根拠を問う発問

第1学年「比例・反比例」のグラフの特徴を理解する場面において、次のような発問を行った。

I [右上がり、と表現するのはどうしてかな。]

I と根拠を問いかけることで、 x の値が増加するにつれて y の値が増加しているという見方に着目することができ、「右上がり」と表現するのだと共有することができた。

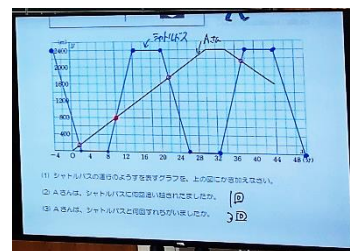


【図表 1 学習ノート】

II [なぜ交点がすれ違うことを表せているのか。]

第2学年「1次関数」のグラフの交点について考察する場面において、IIのような発問を行った。

Aさんの進行状況を表すグラフとシャトルバスの進行状況を表すグラフの交点は、両者がすれ違ったところだと視覚的に



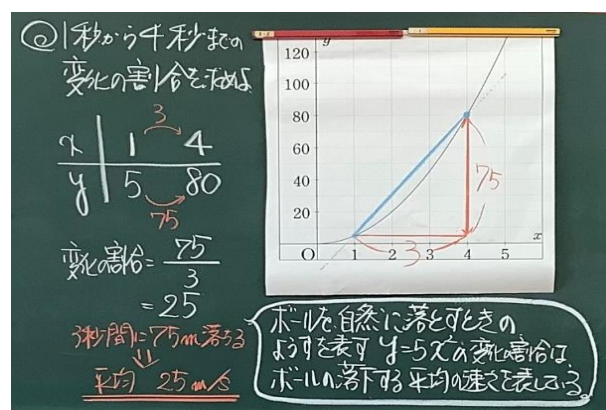
【図表 2 進行状況を表すグラフ】

とらえられる。この場面で、根拠を問われることで、自分が「交点=すれ違う場所、追い越す場所」と判断した理由を見つめることができた。ただ「交わっているから」ではなく、「交点の座標は、連立方程式の解である」ことから、「 x と y の値は、Aさんの進行状況とシャトルバスの進行状況のどちらも成り立たせる値である」という見方・考え方を顕在化させることができた。

III [どうして変化の割合が、平均の速さを表しているといえるのだろう。]

第3学年「関数」の $y=ax^2$ の変化の割合の意味を考える場面において、IVのような発問を行った。

時間分の道のりが速さであることと、 x の増加量分の y の増加量が変化の割合であることを根拠に、生徒は、変化の割合が、平均の速さであると考えることができた。



【図表 3 板書】

イ 解釈を問う発問

【比例とは、どのような関係を表していたかな。]

「比例定数分だけ、増加するグラフ」という意見に対して、Iの問いかけを行った。そのことにより、「 x の値が1増加すると、対応する y の値が比例定数分だけ増加していく」という比例の特徴をグラフと関連付けて考えることができた。

研究内容 1-② 共通点や類似点、相違点に着目し、考察するための手立て

第2学年「1次関数」の単元導入として、1次関数を学ぶ中で、比例が1次関数の特別な場合であることを気付かせるために、比例と1次関数の共通点や類似点、相違点に着目させるための手立てを講じた。

ア 問題提示の工夫

1つ目の手立てとして、問題提示の工夫を行った。比例と1次関数の関係がある問題を順番に提示することで、問題文の中から、共通する部分、変わっている部分に着目させることができた。条件を追加した問題を見せたのち、「これは比例の関係といえそうか」と発問することで、どちらの問題も同じ割合でお湯がたまっているが、最初にお湯がたまっているかどうかで、比例とは違った関数になることを見通すこともできた。

<最初に提示した問題（比例の関係）>

深さ80cmの直方体の浴槽に一定の割合でお湯をためている。

1分後に様子を見に行くと、
水面の高さが**5cm**になっていた。
2分後には**10cm**、3分後には**15cm**。

10分後の水面の高さは何cmになっている
だろうか？

<条件を追加した問題（1次関数の関係）>

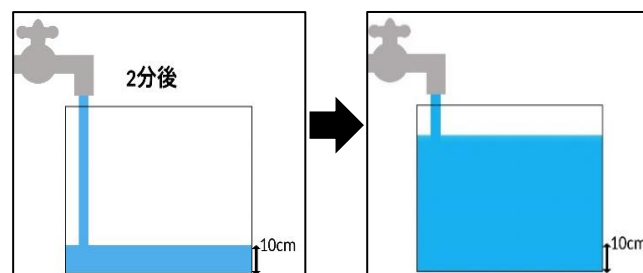
深さ80cmの直方体の浴槽に一定の割合でお湯をためている。
最初に10cmのお湯がたまっている。

1分後に様子を見に行くと、
水面の高さが**15cm**になっていた。
2分後には**20cm**、3分後には**25cm**。

10分後の水面の高さは何cmになっている
だろうか？

問題を提示する際にお湯がたまっていく様子をアニメーションで見せることで、変化する様子を視覚的にとらえ、最初にお湯がたまっている条件が追加されたことで、変わる部分、共通している部分に着目させることができる支援に繋がった。

<問題をイメージするためのアニメーション>



イ 関数を比較するための工夫

2つ目の手立てとして、比例と1次関数の式や表を比較させる活動を取り入れたことである。1次関数の関係をまとめた後に、「1次関数と比例の、表や式の違いはなんだろう」と発問することで、「1次関数の表は $x=0$ のとき、 $y=0$ ではない」、「1次関数の式には b があるが、比例の式にはない」などの相違点に着目する姿があった。

また、表からどちらの関係も x の値が1増加すると、 y の値は一定の割合で増加している共通点に気付く姿もあった。これらの着目した点から、比例は1次関数の式が $b=0$ の時の特別な場合であることに気付かせることができた。また、 b の値だけでなく、 a の値が0の時はどうなるか発展して考えることもできた。

比例の表と式とを同じ所に同じ所に示す

2分後の水面の高さy cmと示す

① 比例

x(分)	y(cm)
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45
10	50

② 1次関数

x(分)	y(cm)
0	10
1	15
2	20
3	25
4	30
5	35
6	40
7	45
8	50
9	55
10	60

③ 式

比例: $y = 5x$

1次関数: $y = 5x + 10$

④ 発展

比例: $y = 5 \times 10 = 50$

1次関数: $y = 5 \times 10 + 10 = 60$

【図表4 関数を比較した板書】

2つの手立てを実践した結果、毎時間記入している振り返りシートに、「最初は比例と1次関数は違うものだと思っていたが、比例は1次関数の仲間であることがわかった」、「1年生で学習した比例が1次関数に含まれることに驚いた」など、比例が1次関数の特別な場合であることの理解を深める生徒の姿が多く現れた。

また、「反比例は1次関数ではない」と考察する振り返りがあり、これまで学習した内容をつなげ、統合的・発展的に考察する生徒の姿があった。

(2) 数学的に説明することができるための工夫

研究内容2-① 数学的な表現を用いて、解釈・説明する場の設定

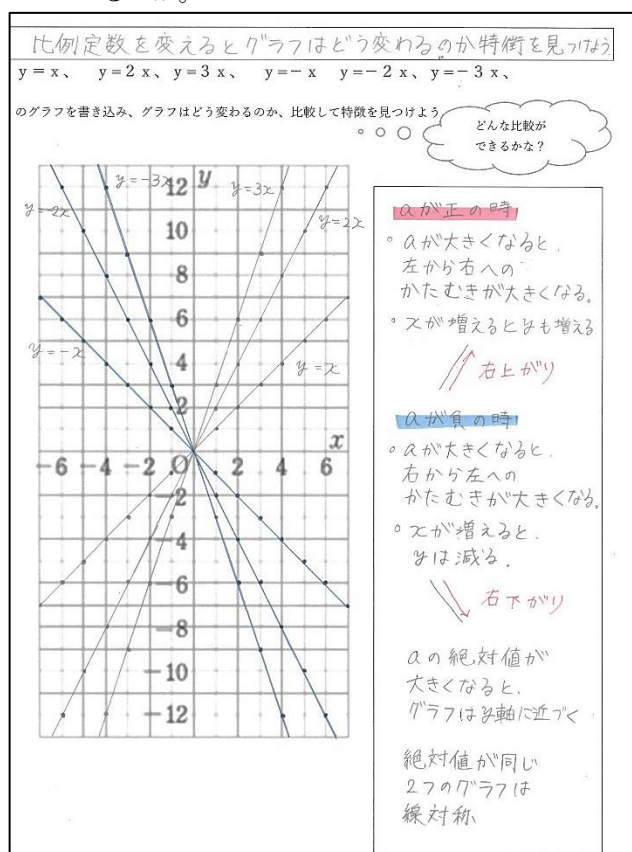
式によって、表やグラフに特徴や違いがあることは、表の数値の変化やグラフの直線の違いを見取ることによって理解はできる。しかし、どんな特徴や違いがあるのか、数学的な表現を用いて、解釈したり、説明したりすることに難しさがある単元である。そこで、生徒が気付いた特徴や違いの解釈を自分の言葉で説明させ、その言葉をどう数学的に表現するのが正しい表現なのか指導することで、「生徒の解釈」と「正しい数学的な表現」を結びつけることが必要だと考えた。

ア 多様な視点をもたせる場の設定

第1学年「比例・反比例」のグラフの特徴を調べる場面において、次のような視点をもたせた。

視点① 比例定数 a が正のときと、負のとき

視点② a の値を大きくすると、グラフはどう変化するか。



【図表5 学習ノート】

まず、視点を生徒の発言から明らかにすることで、どの生徒にも考えをもたせるようにした。

比例定数が正の数の時に、グラフは「/」という形になるとは理解していても言葉で表現できない生徒に

は「/」と書き表して良いことを伝え、その後、みんなが共通して表現する言葉として「右上がり」という表現を指導するなど、生徒の解釈と正しい数学的な表現を結びつけることを大切にした。

イ 考え方の見通しをもつための場の設定

全学年全単元において、毎時間予習プリント（図表6）を用いて予習を行っている。教科書の“？考えてみよう”や本時に関わる既習内容を取り上げたりしている。関数の単元では、既習の関数での式・表・グラフの特徴や考え方を確認するような復習問題を出すことで、本時使う考え方の見通しをもてるようにしている。

（予習プリント：関数⑧）P.120, 121
 復習 y が x の1次関数で、 $x=1$ のとき $y=-2$ 、 $x=4$ のとき $y=7$ である。
 このとき、 x と y の関係を表す式を求めなさい。

【図表6 予習プリント】

また、予習プリントの問題から、「1次関数と比べてどうだろう？」「グラフのどこを見ればいい？」などと関数の特徴等を視点に問い返すことで、既習内容を思い出して比較したり、式・表・グラフをつなげたりしながら思考を深めることができた。

ウ ICTを活用し、数学的な表現を用いて伝える場の設定

生徒がかいたグラフや表などをタブレットで写真を撮らせ、お互いの写真を送り合ったり、見せ合ったりしながら説明し合う活動を仕組むことで、「なぜその特徴を捉えたのか」「グラフや表のどこに着目したのか」根拠をもって伝えあうことができ、タブレットの有効性を感じた。



【図表7 タブレットを使った交流の様子】

グラフをタブレットの写真に撮って指し示したり、タッチペンで書きながら説明したりすることで、言葉でうまく表現できない生徒も相手に分かるように、主体的に伝えようとする姿が見られた。

研究内容2－②思考の過程や判断の根拠を的確に表現するための手立て

ア 自由進度学習を取り入れた授業構成の工夫

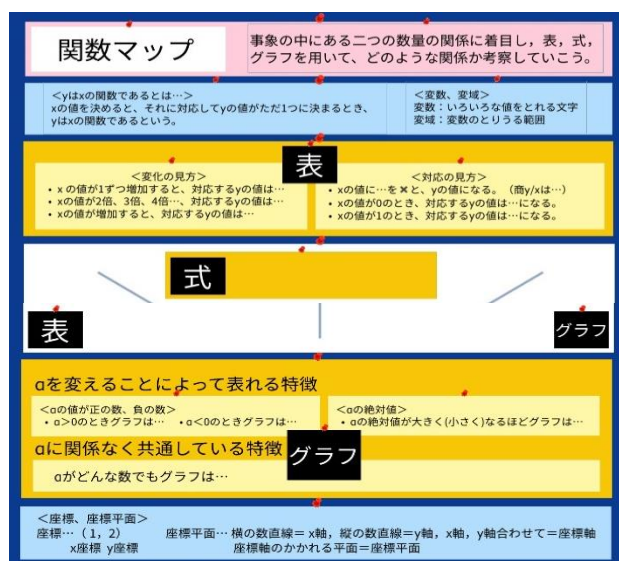
第3学年「関数」の単元構成は、新しい関数について定義し、表に表れる特徴、グラフに表れる特徴、式の求め方のように、一つずつ学習していく単元構成となっていた。そこで、関数 $y=ax^2$ の表やグラフの特徴を主体的に調べ、相互に関連付けながら考察できるように、以下のように授業構成の工夫を行った。

時	これまでの授業構成	自由進度学習を取り入れた授業構成
1	関数 $y=ax^2$	関数の復習, 関数 $y=ax^2$
2	$y=ax^2$ のグラフ 1	$y=ax^2$ の表やグラフの特徴 ・個人追究 (2時間) ・グループ交流 (1時間)
3	$y=ax^2$ のグラフ 2	
4	$y=ax^2$ の値の変化と変域	
5	$y=ax^2$ の変化の割合	$y=ax^2$ の変化の割合

第2時から第4時までを一つの内容と捉え、表とグラフを一緒に考えられるようにした。生徒が自由に比例定数 a を変えて関数 $y=ax^2$ の表やグラフをかき、その表やグラフに表れる特徴を追究する活動を行った。そして、そこで見いだした特徴を生徒同士がグループで交流することで、他者の表現と比較しながら特徴をまとめられるようにした。

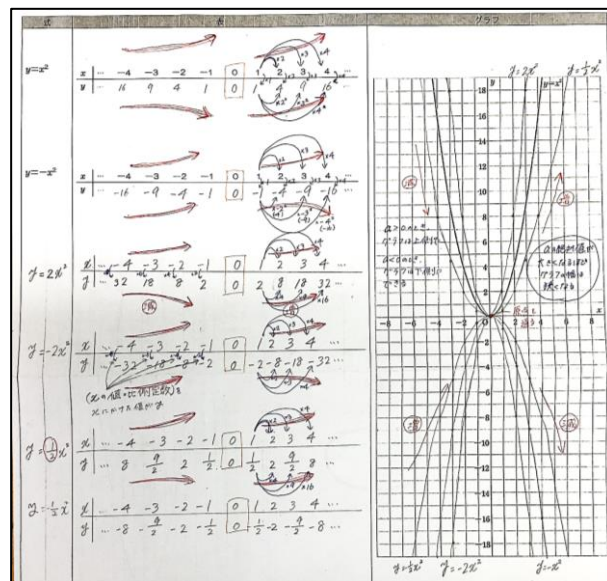
イ 関数マップを利用した主体的な活動の工夫

単元の第1時で、関数の表やグラフの見方や考え方についてまとめた関数マップを使用し、比例や反比例の表やグラフに表れる特徴を復習した。また、新しい関数でも、同じ見方や考え方をすれば表やグラフの特徴を調べることができることを確認した。



【図表8 関数マップ】

そして、第2時から第4時の個人追究の場面で、この関数マップを思考ツールとして用い、表やグラフの特徴を調べる際の視点とした。このように、関数マップを活用することで生徒の思考の過程を表現できるようにした。



【図表9 生徒のプリント】

ウ グループ交流の位置付け

表、式、グラフからどのようなことが読み取れるのかや、そこにはどんなつながりがあるのかを3人グループで交流するようにした。生徒は、個人追究で調べた表やグラフの特徴を交流することで、一人では気付かなかった特徴に気付いたり、曖昧だった考えを確かなものにしたりしながら交流を進めていった。また、表と式とグラフをつないで考えるなど、自分の考えの根拠を的確に表現できるようにした。

次は生徒の振り返りである。

○ 振り返り

私は、はじめは、この $y=ax^2$ のグラフは比例や反比例よりもきそくは少ないと思っていたけど、表やグラフと比例定数 a の関係りかとても多いことを交流を通じて知ることができた。また a の値を変化させた時の表などもやってみるととてもおもしろいと思った。表、式、グラフのつながりがよくわかった。また a を変化させて調べてみたい。

【図表10 生徒の振り返り】

生徒は、表、式、グラフのつながりを比例定数 a に着目して根拠を明らかにして表現しているだけでなく、 a の値を変えてさらに調べてみたいと興味・関心をもつことができていた。

5 研究実践のまとめ

(1) 全国学力・学習状況調査の結果より

出題の趣旨	令和4年度	令和5年度
①一次関数の変化の割合の意味を理解している。	33.8%	40.8%
②与えられた表やグラフから、必要な情報を適切に読み取ることができる。	46.7%	57.6%
③事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することができる。	32.8%	46.4%

令和5年度の全国学力状況調査の郡上市の結果である。①（調査問題4）の結果は、令和4年度の全国学力状況調査の結果より高い数値になっており、基本的な関数の知識、技能は習得していることがわかる。また、②、③（調査問題8）の(1)、(3)の結果では、グラフから必要な情報を読み取ることや、事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することにおいても、令和4年度の全国学力状況調査の結果より高い数値になっており、事象を数学的に解釈し数学的に説明することのできる生徒が増えてきていることが分かる。

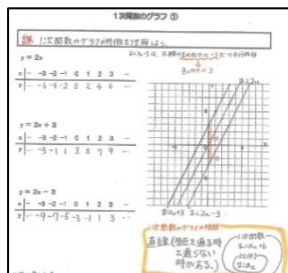
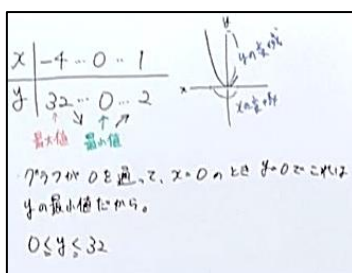
(2) 研究実践の成果と課題

研究内容1

「数学的な見方・考え方をはたらかせる工夫」

○どの関数も表・式・グラフの3点セットで考えることができるように、根拠を問い返す発問をすることで、それらを相互に関連付けて考えさせることができた。

○表・式・グラフを関連させながら考えたり、今までに学んだ関数と比べたりする活動を通して、継続的に共通点や相違点に着目することで、関数について調べて考えるときの視点が身についた。



▲関数領域のつながりをもっと意識して、発展的な考えや疑問が生徒から出るようにする。

研究内容2

「数学的に説明することができるための工夫」

○数学的な言葉を用いて説明する場を設定することで、「これがこうで〜」などと曖昧な表現をする生徒に対して、「習った言葉使うとどう言える？」などと問うことで、数学的用語を活用して、説明し合う生徒の姿が見られた。



○利用問題を考えるときに、表・式・グラフのどれを使って考えたのか、何と何を関連させて考えたのかを交流した際に、ICTを活用したことで仲間の見方・考え方が比較しやすくなり、生徒が表・式・グラフの関連を実感したり、根拠をもって説明したりする姿が見られた。

▲比例と反比例でそれぞれ見つけた特徴を交流する場を設定したが、数学的表現を使えない生徒が多かった。説明する場面や内容が生徒にとって適切となっているか、説明できるような指導をしてきたのか、目的に応じて数学的表現を適切に選択できているか等、様々な視点から工夫を施していく。

▲2年生少人数指導の中で、数学の苦手な生徒が多いが、「xの値が1ずつ増えると・・・」「グラフの切片（傾き）が〇だから・・・」などの数学用語を少しでも使えるように指導する。